Thematische Übungsaufgaben
Funktionen

1. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

   a) $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ b) $y = g(x) = -2x + 4$

   c) $y = h(x) = x - 1{,}5$

2. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

   a) $y = f(x) = (x + 2)^2 + 1$ b) $y = g(x) = x^2 - 2x + 1{,}5$

   c) $y = h(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{4}$

3. Legen Sie eine Wertetabelle an und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen im Bereich $-4 \leq x \leq 4$.

   a) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ b) $y = g(x) = 6 \cdot x^{-1}$

   c) $y = h(x) = 4 \cdot \sin x$

4. Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = x^2 + 2x - 1$.

   a) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt P(1,5; 4) auf dem Graphen der Funktion f liegt.

   b) Auf dem Graphen der Funktion f liegen die Punkte $P_1(-2; y_1)$ und $P_2(2; y_2)$. Durch diese Punkte verläuft eine Gerade g. Geben Sie die zu der Gerade g gehörende Funktionsgleichung an.

5. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen.

   a) $y = f(x) = \frac{3}{4}x + 6$ b) $y = g(x) = x^2 + 7x - 3{,}75$

   c) $y = h(x) = (x + 1) \cdot (x - 5)$ d) $y = i(x) = x^2 + 2x + 3$

6. Gegeben ist eine Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = x^2 + px + q$ $(p, q \in \mathbb{R})$.

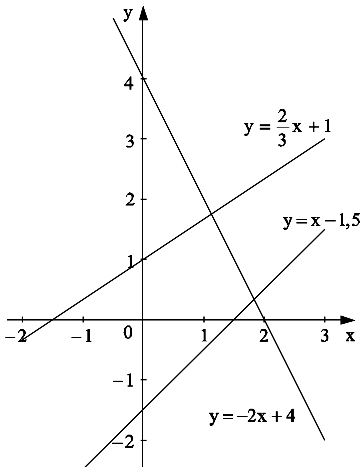
   a) Die Funktion f hat nur eine Nullstelle und der Wert für p beträgt 3.
   Berechnen Sie den Wert für q.

   b) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen den Wahrheitswert an:

   A_1: Der Graph der Funktion f ist eine nach oben geöffnete Parabel.
   A_2: Der Graph der Funktion f berührt die x-Achse an genau einer Stelle.
   A_3: Der Wertebereich der Funktion f enthält nur positive Zahlen.

Lösungen

1. Alle drei Funktionen sind vom Typ $y = mx + n$.
   n ist die Stelle, an der der Graph die y-Achse schneidet, m ist der Anstieg der Geraden (Anstiegsdreieck).



2. In allen drei Fällen handelt es sich um quadratische Funktionen, die als Graph eine nach oben geöffnete Normalparabel haben.
   a) Die Funktion liegt in der Scheitelpunktform $y = (x + d)^2 + e$ vor. Der Scheitelpunkt liegt dann bei $S(-d;\, e)$, also in unserem Fall bei $\underline{\underline{S(-2; 1)}}$.

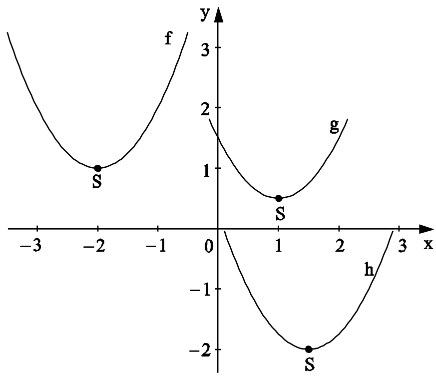
   b) Die Funktion liegt in der Normalform $y = x^2 + px + q$ vor; $p = -2$, $q = 1{,}5$.
   Scheitelpunkt $S(x_S,\, y_S)$:

$$x_S = -\frac{p}{2} \qquad y_S = -\frac{p^2}{4} + q$$

$$x_S = -\frac{(-2)^2}{2} = \underline{1} \qquad y_S = -\frac{(-2)^2}{4} + 1{,}5 = \underline{0{,}5}$$

$\underline{\underline{S(1; 0{,}5)}}$

   c) Der Lösungsweg ist wie bei 2 b), mit $p = -3$ und $q = \frac{1}{4}$.
   Scheitelpunkt: $\underline{\underline{S(1{,}5; -2)}}$



3. a)

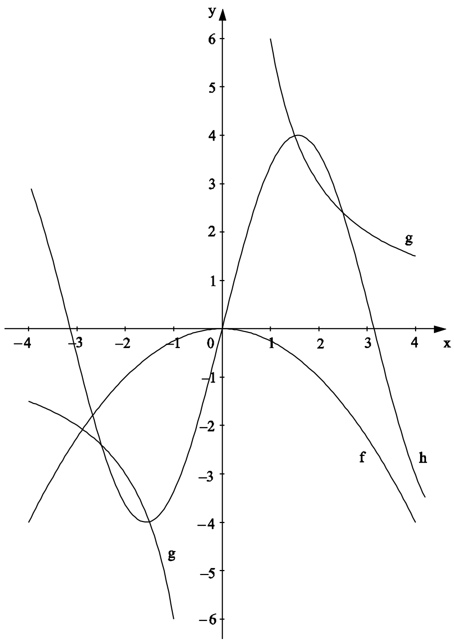
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−4	−2,25	−1	−0,25	0	−0,25	−1	−2,25	−4

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−1,5	−2	−3	−6	nicht definiert	6	3	2	1,5

c) Die Funktion hat den Typ $y = a \cdot \sin x$.
Ihre Nullstellen liegen bei $x_k = k \cdot \pi$ ($k \in 9$). An den Stellen $x_k = k \cdot \frac{\pi}{2}$ ($k \in 9$) hat sie Maxima und Minima. Deshalb nehmen wir die x-Werte $-\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ und π in die Wertetabelle auf.

x	−4	−π	−3	−2	$-\frac{\pi}{2}$	−1	0	1	$\frac{\pi}{2}$	2	3	π	4
y	3,0	0	−0,6	−3,6	−4	−3,4	0	3,4	4	3,6	0,6	0	−3,0



4. a) **Funktionswert an der Stelle x = 1,5:**

$y = x^2 + 2x - 1$ | x = 1,5 einsetzen

$y = 1{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 - 1$

$\underline{y = 4{,}25}$

Der Punkt P(1,5; 4) liegt nicht auf dem Graphen von f.

b) **y-Koordinaten von P_1 und P_2:**

$y = x^2 + 2x - 1 \quad | \; x_1 = -2$ einsetzen

$y_1 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1$

$\underline{y_1 = -1}$

$y = x^2 + 2x - 1 \quad | \; x_2 = 2$ einsetzen

$y_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1$

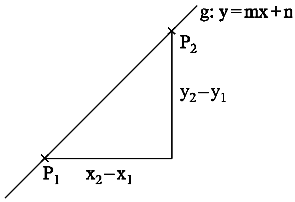
$\underline{y_2 = 7}$

Anstieg m der Geraden:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2}$$

$$= \frac{7-(-1)}{2-(-2)}$$

$\underline{m = 2}$



Abschnitt n auf der y-Achse:

$y = 2x + n \quad | \; P_1(-2; -1)$ einsetzen

$-1 = 2 \cdot (-2) + n$

$\underline{3 = n}$

Zu der Gerade g gehört die Funktionsgleichung y = g(x) = 2x + 3

5. a) $y = \frac{3}{4}x + 6 \quad | \; y = 0$ einsetzen

$0 = \frac{3}{4}x + 6 \quad | \; -6$

$6 = \frac{3}{4}x \quad | \; \cdot \frac{4}{3}$

$\frac{6 \cdot 4}{3} = x$

$\underline{\underline{8 = x}}$

b) $y = x^2 + 7x - 3{,}75 \quad | \; y = 0$ einsetzen

$0 = x^2 + 7x - 3{,}75$

Wir haben eine quadratische Gleichung vom Typ $0 = x^2 + px + q$ mit p = 7 und q = –3,75 erhalten.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} - (-3{,}75)}$$
$$= -\frac{7}{2} \pm 4$$
$$\underline{\underline{x_1 = 0{,}5}} \qquad \underline{\underline{x_2 = -7{,}5}}$$

c) $y = (x + 1) \cdot (x - 5)$ | $y = 0$ einsetzen
$0 = (x + 1) \cdot (x - 5)$
Das Produkt aus zwei Termen wird genau dann null, wenn einer der Terme null wird.
$x + 1$ wird null für $\underline{\underline{x_1 = -1}}$

$x - 5$ wird null für $\underline{\underline{x_2 = 5}}$

d) $y = x^2 + 2x + 3$ | y = einsetzen
$0 = x^2 + 2x + 3$ quadratische Gleichung mit $p = 2$, $q = 3$
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$
$$= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - 3}$$
$$= -1 \pm \sqrt{-2}$$
$\sqrt{-2}$ ist im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert. Es gibt also keine reelle Zahl x, für die $x^2 + 2x + 3$ den Wert null annimmt. Es gibt keine Nullstelle.

6. a) $y = x^2 + px + q$ | $p = 3$ einsetzen
$y = x^2 + 3x + q$ | $y = 0$ einsetzen (Nullstelle)
$0 = x^2 + 3x + q$ | Lösungsformel anwenden
$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} - q}$$
$$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - q}$$
Da die Funktion f nur eine Nullstelle haben soll, muss der Wert unter der Wurzel null sein.
$$\frac{9}{4} - q = 0$$
$$\underline{\underline{q = \frac{9}{4}}}$$

b) A_1: wahr, denn vor dem x^2 steht kein negativer Faktor
A_2: wahr, diese Stelle ist die Nullstelle
A_3: falsch, denn der Wertebereich enthält auch den y-Wert 0.